Numerical Analysis

التحليل العددي

الاخطـــــــاء

مصادر الاخطاء: Source of errors

1. **اخطاء الصياغة: formulation errors**

النموذج الرياضي للحالة الفيزياوية هو محاولة لاعطاء علاقة رياضية بين بعض الكميات الفيزياوية ولان المسألة الفيزياوية في الطبيعة معقدة لذا فانها تفرض الكثير من التبسيطات المختلفة لغرض تصنيع نموذج رياضي مفهوم وبسبب هذه التبسيطات فان دقة هذا النوذج الرياضي الناتج تكون محدودة وهذا التحديد يؤدي الى خطأ

$$F = \frac{d}{dt}(mv); \qquad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-0}} = m_0$$

$$F = \frac{d}{dt}(m_0 v) = m_0 \ \frac{dv}{dt} = \ m_0 a$$

2. **الاخطاء الصلبية: Inherent errors**

ان استخدام البيانات التي ليس لها قيمة دقيقة (مضبوطة) في الصيغ الرياضية تؤدي الى نتائج غير دقيقة مثل $[\pi = 3.14285 \ldots, e = 2.7182818 \ldots, \sqrt{2} = 1.4]$ وان استخدام بيانات في اجهزة حديثة واستخدام نفس البيانات في اجهزة قديمة فيه اختلاف في النتائج المستحصلة وهذا الاختلاف الناتج بسبب دقة الاجهزة.

3. **اخطاء البتر: Truncation errors**

ان الكثير من الدوال الرياضية معرفة على شكل متسلسة غير منهية وحيث ان حساب هذه المتسلسلات مستحيلاً لذلك وجب تحديد عدد حدود المتسلسة وبهذا التحديد فان هناك خطأ في الناتج

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots; \ \ sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

4. **اخطاء التدوير: Rounding errors**

ان الكثير من الاعداد تحتوي على مراتب عشرية غير منتهية فعند تقريب هذه المراتب العشرية واستخدامها يؤدي الى خطأ في النواتج

$$\frac{1}{3} = 0.3333 \ldots . \Rightarrow 0.333; \qquad e = 2.71828 \ldots \Rightarrow 2.7183$$

5. **اخطاء القطع: Chopping errors**

تنتج هذه الاخطاء عند بتر عدد ذو مراتب عشرية عديدة الى عدد ذو مراتب عشرية اقل وبدون تدوير

$$e = 2.71828 \ldots \Rightarrow 2.7182$$

$$\pi = 3.14285 \ldots \Rightarrow \pi = 3.14$$

6. **اخطاء التراكم: Accumulation errors**

تتضمن بعض الطرق العددية لحل المعادلات الرياضية تكراراً لمجموعة من العمليات الحسابية ولخطوات متعاقبة فأذا وجد خطأ في احدى التكرارات فان الخطأ سيزداد لاعتماد الحسابات على القيم التقريبية المحسوبة في الخطوات السابقة

$$x_{i+1} = f(x_i), \qquad i = 0, 1, 2, \dots$$

انواع الاخطاء:

لتكن $\hat{x}$ القيمة التقريبية لعدد قيمته الحقيقية هي x فان هناك نوعان من الاخطاء وهي:

اولاً: الخطأ المطلق Absolute error

يعرف الخطأ المطلق بأنه حاصل طرح القيمة التقريبية للعدد $(\hat{x})$ من القيمة الحقيقية له x ويرمز له بالرمز (e_x) والصيغة العامة لهذا الخطأ هي

$$|e_x| = |x - \hat{x}|$$

ثانياً: الخطأ النسبي: Relative error

يعرف الخطأ النسبي بأنه النسبة بين قيمة الخطأ المطلق للعدد e_x والقيمة الحقيقية له x ويرمز له بالرمز δ_x

$$\delta_x = \left|\frac{e_x}{x}\right| \cong \left|\frac{e_x}{\hat{x}}\right|$$

Examples: find the absolute and relative errors of

1. If $x = 0.005$ and $\hat{x} = 0.0049$
2. If $y = 0.135$ and $\hat{y} = 0.136$
3. If $z = 100$ and $\hat{z} = 99.9$

Solution:

1. $e_x = |x - \hat{x}| = |0.005 - 0.0049| = 0.0001$

$$\delta_x = \frac{e_x}{x} = \frac{0.0001}{0.005} = 0.02$$

2. $e_y = |y - \hat{y}| = |0.135 - 0.136| = |-0.001| = 0.001$

$$\delta_y = \frac{e_y}{y} = \frac{0.001}{0.135} = 0.007407407$$

دور واقطع الى (ثلاث) مراتب عشرية

دور واقطع الى (خمسة) مراتب عشرية

$$\delta_y = 0.007, \qquad \delta_y = 0.007$$

$$\delta_y = 0.00741, \qquad \delta_y = 0.00740$$

الاعداد في حالة الفارزة السائبة Floating point formula

ليكن x عددا حقيقيا ، فأن هناك صيغتان للعدد في حالة الفارزة السائبة هما :

الصيغة الاولى

تكتب الاعداد في هذه الصيغة كالاتي:

$$x = A \times B^c$$

A: الجزء العشري من العدد ($A = \pm 0.d_1 d_2 \ldots\ldots$)

B: النظام المستخدم (B=2,8,10,16,……)

C: عدد مراتب تحويل الفارزة

((التحويل من اليسار الى اليمين فأن قيمة c تكون موجبة))

((التحويل من اليمين الى اليسار فأن قيمة c تكون سالبة))

Example: write the following numbers to the floating point formula

$$x = 25149 \Rightarrow x = 0.25149 \times 10^5$$

$$y = -0.0125 \Rightarrow y = -0.125 \times 10^{-1}$$

$$z = 7843.9 \Rightarrow z = 78.439 \times 10^2$$

$$k = 0.0039 \Rightarrow k = 0.39 \times 10^{-2}$$

العمليات الحسابية للاعداد بصيغة الفارزة السائبة

1- عمليتا الجمع والطرح

ليكن

$x = A_1 \times B_1^{c_1}$ و $y = A_2 \times B_2^{c_2}$

لجمع او طرح هاذين العددين يجب ان يتوفر الشرطين الاتيين

$B_1 = B_2$ and
$c_1 = c_2$

2- عمليتا الضرب والقسمة

عند ضرب او قسمة العددين اعلاه فانة يجب ان يتوفر الشرط الاتي

$$B_1 = B_2$$

Example:

If $x = 0.22159 \times 10^2, y = 0.3 \times 10^{-1}$ *and* $z = 0.111 \times 10^3$, then by floating point formula find

1. $k = 2x + \frac{y+z}{x}$ **2.** $k = \frac{x^2+1}{y} - z$ **3.** $k = x - 2y + xz$

Solution 1. $k = 2x + \frac{y+z}{x}$

$$2x = 2(0.22159 \times 10^2) = 0.44318 \times 10^2$$

$$y + z = 0.3 \times 10^{-1} \; + 0.111 \times 10^3 = 0.00003 \times 10^3 + 0.111 \times 10^3 = 0.11103 \times 10^3$$

$$\frac{y+z}{x} = \frac{0.11103 \times 10^3}{0.22159 \times 10^2} = 0.501060517 \times 10^3 \times 10^{-2} = 0.501060517 \times 10^1$$

$$k = 0.44318 \times 10^2 + 0.501060517 \times 10^1 = 0.0501060517 \times 10^2 + 0.44318 \times 10^2$$
$$= 0.4932860517 \times 10^2$$

Root finding for nonlinear equations: ايجاد الجذور للمعادلة غير الخطية

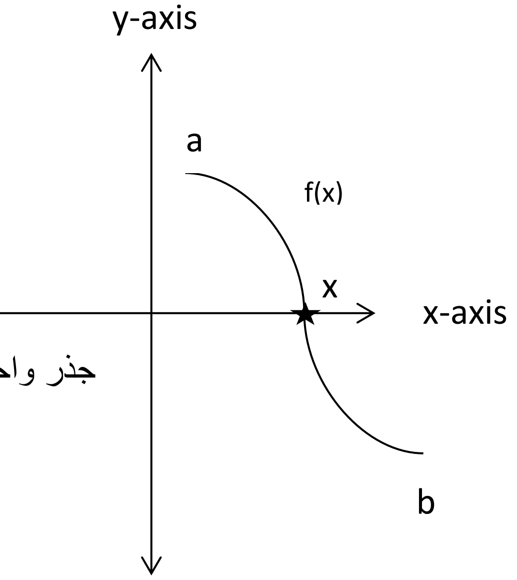
ايجاد جذر واحد او اكثر للمعادلة $f(x) = 0$

تسمى الطرائق العددية لايجاد الجذور بالطرائق التكرارية وان هذه الطرائق تشكل الموضوع الرئيسي في هذا الفصل.

الطرائق التكرارية لحل المعادلات تحتاج اولاً الى معرفة التخمين الاولي للجذر وهذا التخمين يمكن الحصول علية من تحديد موقع الجذر اولاً (الفترة التي يقع فيها الجذر) ومن ثم نأخذ قيمة اولية للجذر ومن الطرق لأيجاد موقع الجذر هي

اولاً: طريقة الرسم: Graphical method

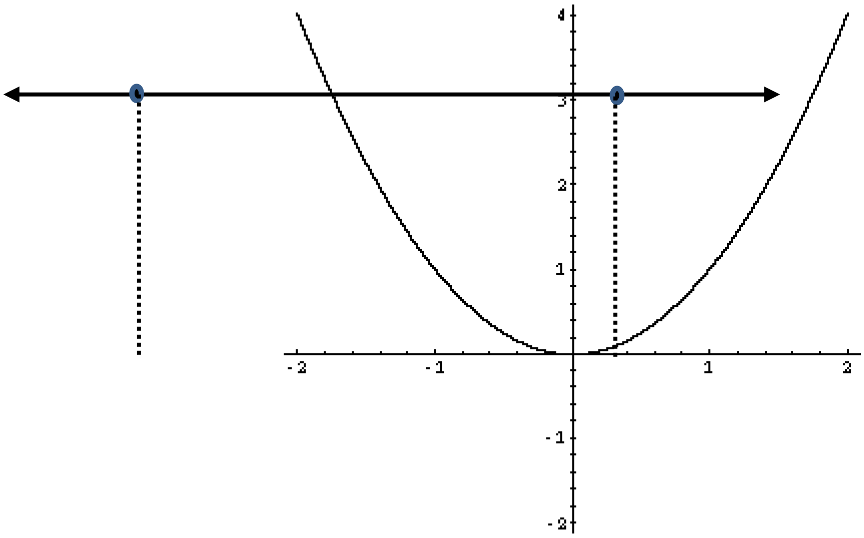
لهذه الطريقة حالتان وهما:
اذا كان رسم الدالة يحتوي على منحني واحد فقط فان موقع الجذر يكون عند التقاء (تقاطع) منحني الدالة مع محور x



اما اذا كان رسم الدالة يحتوي على منحنيين او اكثر فان موقع الجذر يكون عند تقاطع منحني الدالة مع بعضهما والعمود النازل من نقطة التقاطع على محور x يمثل موقع الجذر
بمعنى اخرفي بعض الاحيان يصعب رسم الدالة فأننا في هذة الحالة نكتب الدالة على شكل دالتين اي ان

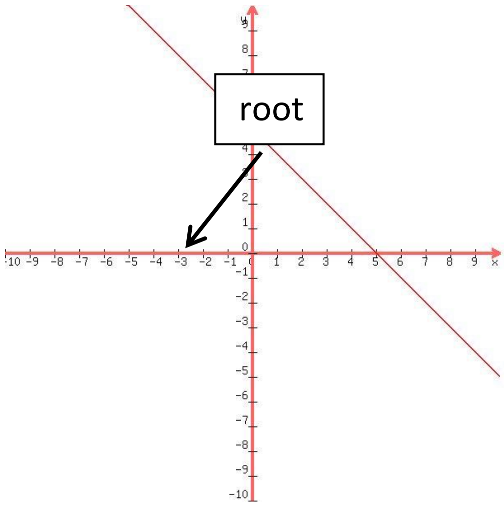
$$f(x) = 0$$
$$f_1(x) - f_2(x) = 0 \Longrightarrow f_1(x) = f_2(x)$$

بحيث ان الدالتين يسهل رسمهما في هذة الحالة تقاطع الدالتين في نقطة يسمى جذر المعادلة كما في الرسم



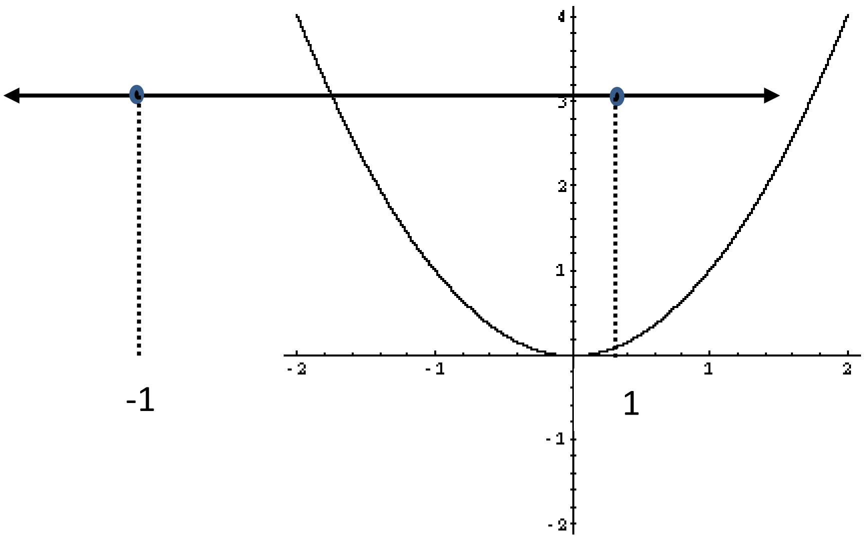
$y = x^2$

Examples: find the locations of the roots of the following equations $1.\ f(x) = x - 5$



$2.\ \ f(x) = x^2 - 1$

$x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x^2 = 1 y_1 = x^2 \quad and \quad y_2 = 1$



$y = x^2$

ثانياً: **الطريقة التحليلية Analytical method**

ان هذا الاسلوب في تعيين مواقع الجذور يعتمد بالاساس على مبرهنة القيمة المتوسطة والتي تنص على:

اذا كانت f(x) دالة حقيقية ومستمرة في الفترة [a,b] وكانت قيم كل من f(a) و f(b) مختلفين بالاشارة فأنه يوجد على الاقل جذر واحد حقيقي في الفترة [a,b]

ملاحظات:

- يلاحظ بأن اختيار فترة تقسيم صغيرة يؤدي الى دقة في استخراج مواقع الجذور ولكن يعاب عليها زيادة في العمليات الحسابية:
- ويلاحظ ان اختيار فترة تقسيمها كبير يؤدي الى عدم الدقة في استخراج مواقع جميع الجذور
- اذا كانت المعادلة (الدالة) المعطاة تحوي على دالة مثلثية (sin, cos, tan,...) او دوال خاصة (ln, e,...) فلا يمكن تحديد عدد جذورها الموجبة والسالبة لأنها دوال غير منتهية اما الدوال الخاصة فلا يمكن تحديد عدد جذورها الا من خلال الاختبار
- اما اذا كانت المعادلة متعددة الحدود ذات متغير واحد فمن الغالب يمكن تحديد عدد الجذور الموجبة والسالبة من خلال اجراء الاختبار الاتي:
  1. عدد الجذور الكلية لمتعددة الحدود = قيمة اكبر قوى للمتغير
  2. عدد الجذور الموجبة= عدد التغير الحاصل في اشارات حدود $f(x)$
  3. عدد الجذور السالبة= عدد التغير الحاصل في اشارات حدود$f(-x)$

Examples: determine number and location of positive and negative roots of the following

1. $f(x) = x^2 + x - 7$

عدد الجذور الكلية=2

$$f(x) = x^2 + x - 7$$

عدد الجذور الموجبة:1

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x) - 7 = x^2 - x - 7$$

عدد الجذور السالبة: 1

-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
+	-	-	-	-	-	-	+

موقع الجذر الموجب [2,3] وموقع الجذر السالب [-4,-3]

2. $f(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

عدد الجذور الكلية=5

$$f(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1$$

عدد الجذور الموجبة=2

$$f(-x) = (-x)^5 + (-x)^4 - 4(-x)^3 - 3(-x)^2 + 3(-x) + 1$$
$$f(-x) = -x^5 + x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 3x + 1$$

-4	-3	-2	-1	0	1	2
-	-	-	-	+	-	+

موقع الجذران الموجبان [1,2] , [0,1] اما مواقع الجذور السالبة فقد ظهر جذر في الفترة [-1,0] اما الجذران الاخران فلم يظهرا فنقول هنالك احتمالان وهما:

1. اما الفترة [-1,0] تحوي جميع الجذور السالبة وهذا نادر الحدوث
2. او ان الجذران الاخران هما جذرين عقديين ولا يمكن استخراجهما في هذه الطريقة

3. $f(x) = x^2 - e^x + 2$

في هذه الدالة لايمكن استخراج عدد الجذور الكلية مباشرة وذلك لاحتواء الدالة على e^x لذلك نجري عليها طريقة التحليل لتحديد عدد الجذور الموجبة والسالبة

-2	-1	0	1	2	3
+	+	+	+	-	-

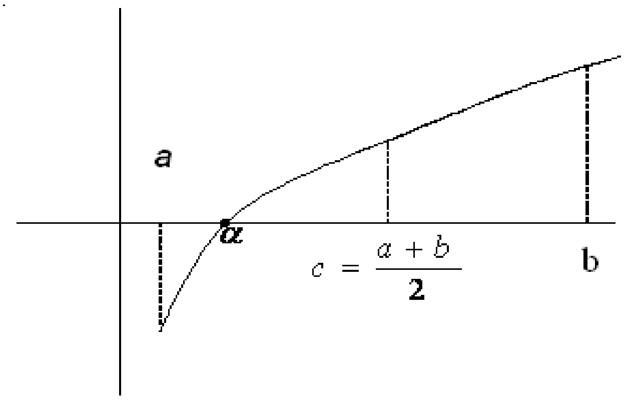
هذه الدالة تحوي على جذر واحد يقع في الفترة [1,2]

Numerical Solution of Nonlinear equations

a. Bisection Method

The Bisection (or half interval) method is an algorithm for location the roots of a function. If the initial interval is between x =a and x =b we know that f(a) and f(b) are of different signs.

f(a).f(b) < 0 (-ve value) and f(x) = 0 has at last one root on the interval.



A simple algorithm for the bisection method consists of the following steps:

1- Choose lower $x = a$ and upper $x = b$. We must checked by ensuring that [f(a).f(b) <0].

2- Define c =(a + b) / 2

3- Make the following evolutions:

a. If f(a).f(c) < 0 . Therefore, set b = c and return to step 2.

b. If f(a).f(c) > 0 . Therefore, set a = c and return to step 2.

c. If f(a).f(c) = 0 , the root equals c, terminate the computation.

Using some mathematical formulas to stop doing calculations for this method.

1-$|x_{i+1} - x_i| < \in$

2-$|f(x_i)| < \in$

3-$\frac{|x_{i+1} - x_i|}{|x_i|} < \in$

Example: by the Bisection method, find the largest root for

$$f(x) = x - \cos(x), \in = 0.020$$

Solution: RAD

x	0	1
f(x)	-	+

x	0	1	0.5	0.75	0.625	0.688	0.719	0.735
f(x)	-1	0.460	-0.378	0.018	-0.186	0.085	-0.033	-0.006

$$\because |x_7 - x_6| = |0.735 - 0.719| = 0.016 < \in = 0.02$$

$$x_6 = 0.735 \; is \; a \; root$$

Example: By using Bisection method find the first positive root

$$f(x) = x^6 - x - 1 \text{ with } \in = 0.001$$

Solution:

x	0	1	2
f(x)	-	-	+

n	a	b	c	b – c	f(c)
1	1	2	1.5	0.5	8.8906
2	1	1.5	1.25	0.25	1.5647
3	1	1.25	1.125	0.125	-0.0977
4	1.125	1.25	1.1875	0.0625	0.6167
5	1.125	1.1875	1.15625		0.2333
6	1.125	1.15625	1.140625		0.0616
7	1.125	1.140625	1.1328125		-0.0196
8	1.1328125	1.140625	1.13671875		0.0206
9	1.1328125	1.13671875	1.134765625		0.0004
10	1.1328125	1.134765625	1.133789063	0.001	-0.0096

There are several advantages to the Bisection method:

1- The method guaranteed to converge.
2- The error bound is guaranteed to decrease by half with each iteration.

The principle disadvantage of the Bisection method is that:

It generally converges slower that other method.

H.W :

1- $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ with [1, 2], ε = 0.001

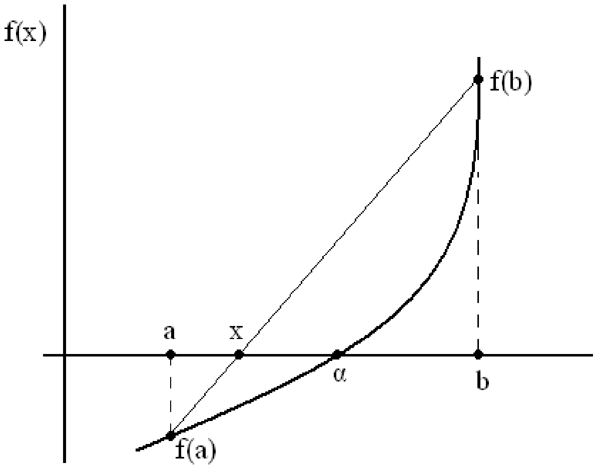
2- $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ with [1, 2], ε = 0.001

b. False Position Method

Similarly to the bisection method, the false position or called linear interpolation method stats with the initial solution interval [a, b] that is believed to contain the solution of $f(x) = 0$. Approximating the curve of $f(x)$ on [a, b] by a straight line connecting the tow points $(a, f(a))$ and $(b, f(b))$, it guesses that the solution may be the point at which the straight line crosses the x- axis:

$$\frac{f(a)}{x-a} = \frac{f(b)}{x-b}$$

$$\boxed{x = b - \frac{f(b)}{f(b)-f(a)}(b-a)}$$



Algorithm

Input: $a, b, f(a), and\ f(b)$

Compute:

- $x = b - \frac{f(b)}{f(b)-f(a)}(b-a);$
- $f(x);$
- $If\ f(a) * f(x) < 0$

  $b = x;$

  $f(b) = f(x);$

- $If\ f(a) * f(x) > 0$

  $a = x;$

  $f(a) = f(x);$

- $If\ f(a).f(x) == 0,\ the\ root\ (\alpha) = x$

end;

Output: $x, f(x)$

Example: By the false position method find approximate value of the root for $f(x) = e^x - 2$ with $\in = 0.0005$

Solution:

x	0	1
f(x)	-	+

$a = 0 \Longrightarrow f(a) = -1$

$b = 1 \Rightarrow f(b) = 0.718$

$$x = b - \frac{f(b)}{f(b) - f(a)}(b - a)$$

$x_2 = 1 - \frac{0.718}{0.718+1}(1 - 0) = 0.582$

$f(x_2) = e^{0.582} - 2 = -0.21$

$f(a) * f(x_2) > 0 \Rightarrow x_2 = a$

$$x_3 = 1 - \frac{0.718}{0.718 + 0.21}(1 - 0.5821) = 0.677$$

$f(x_3) = e^{0.677} - 2 = -0.032$

$f(a) * f(x_3) > 0 \Rightarrow x_3 = a$

$$x_4 = 1 - \frac{0.718}{0.718 + 0.032}(1 - 0.677) = 0.691$$

$f(x_4) = e^{0.691} - 2 = -0.0004$

$since\ |f(x)| = 0.0004 < \epsilon = .0005$

$\therefore\ x = 0.691$ is a root.

Example:

Solve the fo1llowing equation using false position method

$f(x) = x^2 - x - 1$ with interval [1,2]

Solution:

n	a	b	x	f(x)	$\varepsilon = x_{i+1} - x_i$
1	1	2	1.5	-0.25	0.1
2	1.5	2	1.6	-0.04	0.0154
3	1.6	2	1.6154	$-5.8828*10^{-3}$	0.0022
4	1.6154	2	1.6176	$-9.7024*10^{-4}$	0.0004
5	1.6176	2	1.6180	$-7.500*10^{-5}$	0
6	1.6180	2	1.6180	$-7.500*10^{-5}$	0

$\therefore x = 1.6180$ is a root.

There are several advantages of the false position method:

1- The false position method is faster than the bisection method.

2- It includes a test to ensure that the root is bracketed between successive iterations.

The disadvantage of the false position method:

Although the false position method aims to improve the convergence speed over the bisection method, it cannot always achieve the goal, especially when the curve of f(x) on [a, b] is not well approximated by a straight line as depicted in the following figure:

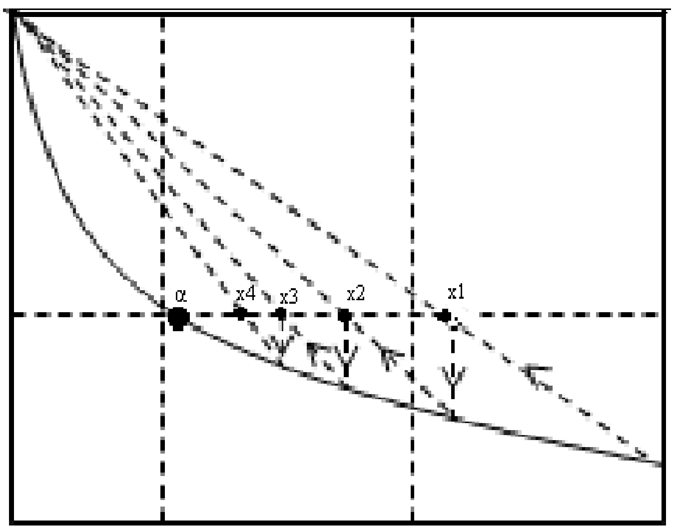


Figure: Solve the equation (tan (π – x) – x =0) by false position method.

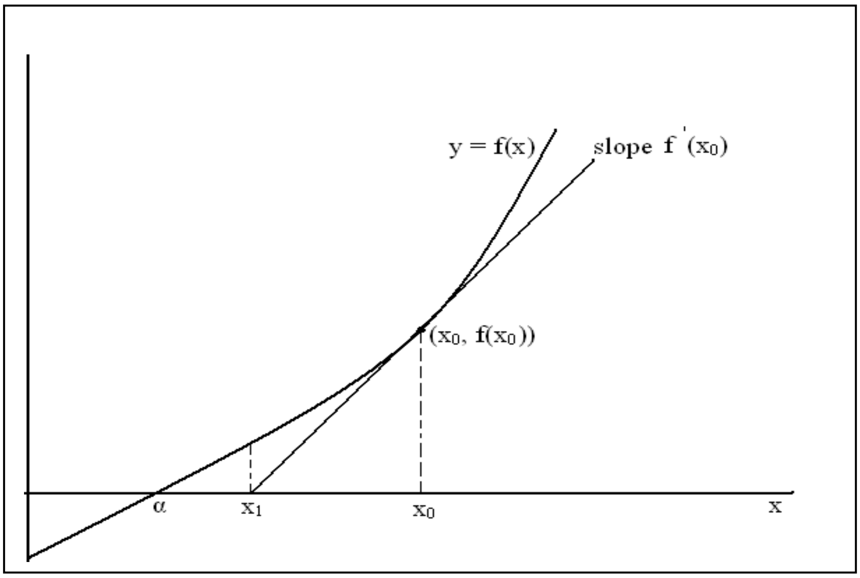
H.W:

1- $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ with [1, 2], $\varepsilon = 0.0001$

2- $\exp(x) - 2x^2 = 0$, At a. $0 \le x \le 1$ b. $3 \le x \le 4$, $\varepsilon = 0.00005$

C. Newton – Raphson Method

Newton – Raphson (or Newton) method can be used to approximate the roots of any linear or non – linear equation of any degree.



We can calculate the slope using the fact that the tangent line contains the two points (x_0, f(x_0)) and (x_1, 0) this leads to the slope being equal to:-

$$\frac{0 - f(x_0)}{x_1 - x_0} = slop = f'(x_0)$$

Then
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

And in general,

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \quad n = 0,1,2,3, \ldots$$

Using some mathematical formulas to stop doing calculations for this method.

1-$|x_{i+1} - x_i| < \in$

Convergence of Newton Raphson method.

$$\left|\frac{f(x_0)f''(x_0)}{(f'(x_0))^2}\right| < 1$$

Example: By N. R method find the solution of the following equations.

$$f(x) = 2x - 1 - 2sinx, \qquad where\ x_0 = 2\ and\ \in = 0$$

<u>**Solution:**</u>

$$f(x) = 2x - 1 - 2\sin(x) \Rightarrow f(x_0) = f(2) = 2(2) - 1 - 2\sin(2) = 1.181$$

$$f'(x) = 2 - 2\cos(x) \Rightarrow f'(x) = f'(2) = 2 - \cos\,(2) = 2.832$$

$$f''(x) = 2\,s\,in(x) \Rightarrow f'(x) = f'(2) = 2\sin\,(2) = 1.819$$

$$\left|\frac{f(x_0)f''(x_0)}{(f'(x_0))^2}\right| = \left|\frac{(1.181)(1.819)}{(2.832)^2}\right| = 0.268 < 1$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{1.181}{2.832} = 1.583$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1.583 - \frac{0.166}{2.024} = 1.501$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1.501 - \frac{0.007}{1.861} = 1.497$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1.497 - \frac{0.001}{1.853} = 1.498$$

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = 1.498 - \frac{0.001}{1.855} = 1.498$$

Since $|x_5 - x_4| = 0$ then $x_5 = 1.498$ is a root.

Example

Solve the following equation using Newton method

$$f(x) = x^6 - x - 1, \quad where\ x_0 = 1.5\ and\ \in = 0$$

Solution

$$f(x) = x6 - x - 1 \Rightarrow f(1.5) = (1.5)^6 - 1.5 - 1 = 8.890625$$

$$f'(x) = 6x^5 - 1 \Rightarrow f'(1.5) = 6(1.5)^5 - 1 = 44.5625$$

$$f''(x) = 30x^4 \Rightarrow f''(1.5) = 30(1.5)^4 = 151.875$$

$$\left|\frac{f(x_0)f''(x_0)}{(f'(x_0))^2}\right| = \left|\frac{(8.890625)(151.875)}{(44.5625)^2} = \frac{1350.320625}{1985.81640625}\right| = 0.679982 < 1$$

The iteration is given by:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{x_n^6 - x_n - 1}{6x_n^5 - 1}\right)$$

n	x_n	$f(x_n)$	$\alpha - x_n$
0	1.5	8.8906	-0.1996
1	1.3004	2.5353	-0.119
2	1.1814	0.5374	-0.042
3	1.1394	0.0487	$-4.6*10^{-3}$
4	1.1348	$7.8058*10^{-4}$	$-1*10^{-4}$
5	1.1347	$-2.4831*10^{-4}$	0
6	1.1347	$-2.4831*10^{-4}$	0

The true root α = 1.1347 and x is equal α.

The advantage of the Newton – Raphson method:

1. Guaranteed to converge to a root if x_0 is close enough to it and f is sufficiently smooth

2. Quadratic convergence near simple root

3. Works for complex functions

The disadvantage of the Newton – Raphson method:

1. Iterates may diverge

2. Requires derivative

3. No easy error bound

<u>H.W:</u>

1. $x^3 - x^2 - x - 1 = 0,$ $x_0 = 1.5$

2. $\ln(x-1) + \cos(x-1) = 0,$ $x_0 = 1.1$

d.Secant Method

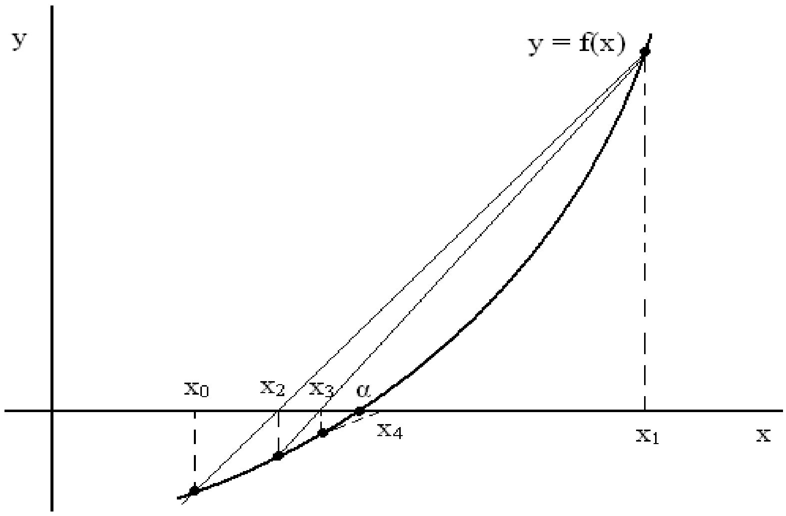
The secant method can be regarded as a modification of the Newton method in the sense that the derivative is replaced by a difference approximation based on the successive estimates

$$f'(x) \cong \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{(x_n - x_{n-1})}$$

This approximation can be substituted into the equation of Newton method to yield the following iterative equation:-

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}}$$

This technique is called the Secant method. It start with the two initial approximations x_0 and x_1, the approximation x_2 is the x-intercept of the line joining (x_0, $f(x_0)$) and (x_1, $f(x_1)$). The approximation x_3 is the x-intercept of the line joining (x_1, $f(x_1)$) and (x_2, $f(x_2)$) and so on, shows the figure below:



Using some mathematical formulas to stop doing calculations for this method.

1- $|x_{i+1} - x_i| < \in$

2- $|f(x_i)| < \in$

Example: Solve the equation below by using the secant method

f(x) = $x^2 - x - 1 = 0$ with $\epsilon = 0$

<u>Solution:</u>

x	0	1	2
$f(x)$	-	-	+

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

$$x_0 = 1 \Longrightarrow f(x_0) = f(1) = 1^2 - 1 - 1 = -1$$

$$x_1 = 2 \Longrightarrow f(x_1) = f(2) = 2^2 - 2 - 1 = 1$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = 2 - \frac{1 * (2 - 1)}{(1 + 1)} = 1.5$$

$$f(1.5) = (1.5)^2 - 1.5 - 1 = -0.25$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = 1.5 - \frac{-0.25 * (1.5 - 2)}{(-0.25 - 1)} = 1.5 - \frac{0.125}{-1.25} = 1.5 + 0.1 = 1.6$$

$$f(1.6) = (1.6)^2 - 1.6 - 1 = -0.04$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)(x_3 - x_2)}{f(x_3) - f(x_2)} = 1.6 - \frac{-0.04 * (1.6 - 1.5)}{(-0.04 + 0.25)} = 1.6 - \frac{-0.004}{0.21} = 1.6 + 0.019 = 1.619$$

.

.

.

n	x_n	$f(x_n)$	$x_{n+1} - x_n$
0	1	-1	1
1	2	1	-0.5
2	1.5	-0.25	0.1
3	1.6	-0.04	0.019
4	1.619	$2.161*10^{-3}$	-0.001
5	1.618	$-7.6*10^{-5}$	0
6	1.618	$-7.6*10^{-5}$	0

Then $x_6 = 1.618$ is a root.

The advantage of the secant method:

1. Linear convergence near multiple roots
2. No derivative needed
3. Works for complex functions

The disadvantage of the secant method:

1. Iterates may diverge
2. No easy error bound

<u>H.W:</u>

Solve the same H.w of false position method

Modified Newton Raphson Method

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i) * f'(x_i)}{\left(f'(x_i)\right)^2 - f(x_i)f''(x_i)} \qquad i = 0,1,2,\ldots..$$

Stop condition is the same of Newton Raphson method condition.

Example: Use Modified Newton-Raphson method to evaluate the roots of $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ with an initial guess of $x_0 = 4$ and $\in= 0.01$.

Solution: First let us find $f'(x)$ and $f''(x)$

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$$
$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$$
$$f''(x) = 6x - 10$$
$$f(4) = 4^3 - 5(4)^2 + 7 * 4 - 3 = 9$$
$$f'(x) = 3(4)^2 - 10 * 4 + 7 = 15$$
$$f''(4) = 6 * 4 - 10 = 14$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0) * f'(x_0)}{\left(f'(x_0)\right)^2 - f(x_0)f''(x_0)} = 4 - \frac{9*15}{(15)^2 - (9*14)} = 2.636$$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$	x_{i+1}	$\in= x_{i+1} - x_i$
1	4.000000	9.00000	15.00000	14.00000	2.636364	**1.364**
2	2.636364	-0.97370	1.48760	5.81818	2.820225	
3	2.820225	-0.59563	2.65876	6.92135	2.961728	
4	2.961728	-0.14728	3.69822	7.77037	2.998479	
5	2.998479	-0.00608	3.98784	7.99087	2.999998	**0.001**

Since $|x_5 - x_4| = 0.001 < 0.01$ then $x_5 = 2.999$ is a root

5. Fixed-Point Iteration method

تعد هذه الطريقة لإيجاد جذور معادلة لا خطية و ذات المتغير الواحد من الطرق ذات الدقة العالي في الوصول الى الجذر

لتكن f(x) دالة مستمرة في الفترة [a,b] وتحتوي على جذر حقيقي في هذه الفترة فلإيجاد قيمة الجذر بهذه الطريقة نتبع الخطوات الاتية:

1- اعادة ترتيب الدالة f(x)=0 وذلك بإبقاء متغير واحد (x) عند يسار المساواة وتحويل كافة المتغيرات بيمنى المساواة اي بالصيغة x=g(x)

حيث ان g(x) تعتبر دالة جديدة ل x وتختلف عن f(x)

2- اخذ مشتقة g(x)

3- تعويض قيمة التقدير الاولي للجذر (x_0) والتي تستخرج عادة من الفترة [a,b] ب$g'(x)$

4- اختبار مدى دقة الصيغة g(x) في الوصول للحل وذلك بتطبيق الصيغة

$$|g'(x)| < 1$$

فاذا كانت أ- الصيغة اعلاه صحيحة فان الصيغة g(x) وقيمة x_0 توصل للحل الصحيح

ب- اما اذا كانت

$$|g'(x)| \geq 1$$

فان الصيغة g(x) لا توصلنا للحل الصحيح او على الاغلب g(x) غير صحيحة

وفي حالة أ فأننا نكمل الحل بأخذ الصيغة العامة لg(x) وهي

$$x_{i+1} = g(x_i) \qquad i = 0, 1, 2, \dots \dots ..$$

اما في حالة (ب) فاننا نقوم بأيجاد صيغة اخرى لg(x) و مستخرجة من f(x) ونقوم بأعادة العمليات (2و3و4) الى ان نصل الى الصيغة الصحيحة لg(x)

شرط التوقف

Using some mathematical formulas to stop doing calculations for this method.

1- $|x_{i+1} - x_i| < \in$

Example: Using fixed point iterative method to find a root

1- $f(x) = 4x^2 + 2x - 1, \qquad \in= 0.005$

2- $f(x) = x^2 - cos(x), \qquad \in= 0.001$ **H. W**

3- **find negative root for** $f(x) = x^2 - 2e^x + 1, \qquad \in= 0.009$ **H. W**

solution:

x	0	1
$f(x)$	-	+

$$x_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = 0.5$$

الصيغة الاولى

$$4x^2+2x-1=0 \Rightarrow 4x^2=1-2x$$
$$\Rightarrow x^2=\frac{1-2x}{4}$$
$$\Rightarrow x=\frac{\sqrt{1-2x}}{2}$$
$$g_1(x)=\frac{\sqrt{1-2x}}{2}$$
$$g'_1(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{2\sqrt{1-2x}}(-2)=\frac{-1}{2\sqrt{1-2x}}$$
$$g'_1(x_0)=g'_1(0.5)=\frac{-1}{2\sqrt{1-2(0.5)}}=-\frac{1}{0}=-\infty$$
$$|g'_1(x_0)|=|\infty|>1$$

$\therefore\ g_1(x)$ لا توصل للحل

الصيغة الثانية

$$4x^2+2x-1=0 \Rightarrow 4x^2=1-2x$$
$$\Rightarrow x=\frac{1-2x}{4x}=\frac{1}{4x}-\frac{1}{2}$$
$$g_2(x)=\frac{1}{4x}-\frac{1}{2}$$
$$g'_2(x)=\frac{-4}{(4x)^2}$$
$$g'_2(x_0)=g'_2(0.5)=\frac{-4}{(4*(0.5))^2}=-\frac{1}{1}=-1$$
$$|g'_1(x_0)|=|1|\not<1$$

$\therefore\ g_2(x)$ لا توصل للحل

الصيغة الثالثة

$$4x^2+2x-1=0 \Rightarrow 2x=1-4x^2$$
$$\Rightarrow x=\frac{1-4x^2}{2}=\frac{1}{2}-2x^2$$

$$g_3(x)=\frac{1}{2}-2x^2$$
$$g'_3(x)=-4x$$

$$g'_3(x_0)=g'_3(0.5)=-4(0.5)=-2$$
$$|g'_3(x_0)|=|2|>1$$

$\therefore\ g_3(x)$ لا توصل للحل

الصيغة الرابعة

$$4x^2+2x-1=0 \Rightarrow x(4x+2)=1$$
$$\Rightarrow x=\frac{1}{4x+2}$$

$$g_4(x)=\frac{1}{4x+2}$$
$$g'_4(x)=-\frac{1}{(4x+2)^2}*4$$

$$g'_4(x_0)=-\frac{4}{(4(0.5)+2)^2}=-0.25$$
$$|g'_4(x_0)|=|-0.25|<1$$

$\therefore g_4(x)$ توصلا للحل

$$x_{i+1}=\frac{1}{4x_i+2}$$
$$x_1=\frac{1}{4x_0+2}=\frac{1}{4(0.5)+2}=0.25$$
$$x_2=\frac{1}{4x_2+2}=\frac{1}{4(0.25)+2}=0.333$$
$$x_3=\frac{1}{4x_2+2}=\frac{1}{4(0.333)+2}=0.3$$
$$x_4=\frac{1}{4x_3+2}=\frac{1}{4(0.3)+2}=0.313$$
$$x_5=\frac{1}{4x_4+2}=\frac{1}{4(0.313)+2}=0.308$$

$$\because |x_5-x_4|=|0.308-0.313|=|-0.005|=0.005=\in$$
$$\therefore x_5=0.308\ is\ a\ root$$

<u>Example1:</u> Find an approximate solution to $f(x) = \cos(x) - x$. Choose $x_0 = 1$, with 4 digits accuracy.

<u>Solution:</u> $x = x + f(x) = \cos(x) - x + x, we\ have\ x = g(x) = \cos(x)$

Choose $x_0 = 1$, and do the iteration $x_{k+1} = \cos(x_k)$: K=0,1,2,3,....

$$\begin{aligned}
x_1 &= \cos x_0 = 0.5403 \\
x_2 &= \cos x_1 = 0.8576 \\
x_3 &= \cos x_2 = 0.6543 \\
&\vdots \\
x_{23} &= \cos x_{22} = 0.7390 \\
x_{24} &= \cos x_{23} = 0.7391 \\
x_{25} &= \cos x_{24} = 0.7391 \quad \text{stop here}
\end{aligned}$$

Our approximation to the root is 0.7391.

Example2: consider $f(x) = e^{-2x}(x-1)$, choose $x_0 = 1$, with 4 digits accuracy

Solution: $x = g(x) = e^{-2x}(x-1) + x$

Choose an initial guess $x_0 = 0.99$,

$$\begin{aligned}
x_1 &= g(x_0) = 0.9886 \\
x_2 &= g(x_1) = 0.9870 \\
x_3 &= g(x_2) = 0.9852 \\
&\vdots \\
x_{27} &= 0.1655 \\
x_{28} &= -0.4338 \\
x_{29} &= -3.8477 \quad \text{Diverges. It does not work.}
\end{aligned}$$

A simple algorithm for **<u>Fixed-Point Iteration</u>** method consists of the following steps:

Given $f(x) = 0$,

1- re-arrange $f(x)$ in the form $x = g(x)$. The simplest way to write $f(x) = 0$ in the form $x = g(x)$ is to add x on both sides, that is, $x = f(x) + x = g(x)$:

2- $derive\ g(x)$,

- $if\ |g'(x)| \leq 1$ the iteration convergence, |
- If $|g'(x)| > 1$ the iteration diverges

In Example 1, $g(x) = \cos x$, $g'(x) = \sin x$, $r = 0.7391$,

$$\left|g'(r)\right| = |\sin(0.7391)| < 1. \qquad \text{OK, convergence.}$$

In Example 2, we have

$$\begin{aligned} g(x) &= e^{-2x}(x-1) + x, \\ g'(x) &= -2e^{-2x}(x-1) + x^{-2x} + 1 \end{aligned}$$

With $r = 1$, we have

$$\left|g'(r\right| = e^{-2} + 1 > 1, \qquad \text{Divergence.}$$

Numerical solution of the linear equations system

منظومة المعادلات الخطية هي مجموعة من المعادلات التي تحتوي على عدد من المعادلات وعدد من المتغيرات ومن الدرجة الاولى.

منظومة المعادلات الخطية الاتية

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_n + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

حلها ينقسم الى ثلاثة حالات.

1- اذا كانت عدد المعادلات اقل من عدد المتغيرات (المجاهيل) فأن المنظومة لها حل لكنه ليس وحيداً

$$x_1 + 3x_2 = 4 \Rightarrow x_1 = 4 - 3x_2$$

2- اذا كانت عدد المعادلات اكثر من عدد المجاهيل فأن المنظومة قد لا يكون لها حلاً على الاطلاق.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 0 \\ 5x_1 - x_2 &= 3 \end{aligned}$$

3- اذا كانت عدد المعادلات مساوياً الى عدد المجاهيل فأن المنظومة يكون لها حلاً وحيداً.

سوف نقتصر في دراستنا في هذا الفصل على الحالة الثالثة.

نقوم بكتابة المعادلات السابقة بصيغة المصفوفات وبالشكل الاتي.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$AX = b$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix} \quad square\ matrix\ 3 \times 3$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{bmatrix} \quad lower\ triangular$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \quad upper\ triangular$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \quad Dignonal\ matrix$$

اذا كانت $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$ **فأن المصفوفة تسمى مصفوفة احادية identity matrix**

يمكن تصنيف الطرق المستخدمة لحل المعادلات الجبرية الخطية الى مجموعتين

اولاً: الطرق المباشرة Direct methods

ثانياً: الطرق التكرارية Iterative methods

الطرق المباشرة Direct methods

1. طريقة الحذف لكاوس: Gaussian Elimination Method

لتكن منظومة المعادلات المراد حلها بالاتي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\vdots b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\vdots b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\vdots b_3 \end{bmatrix}$$

نقوم بتحويل المصفوفة اعلاة الى upper matrix

اي نقوم بتصفير قيمة a_{21} و a_{31} **من المعادلتين الثانية والثالثة على التوالي بأتباع الاسلوب الاتي:**

$$m_1 = -\frac{a_{21}}{a_{11}}$$

نضرب قيمة m_1 في الصف الاول ويجمع الناتج مع الصف الثاني

$$m_2 = -\frac{a_{31}}{a_{11}}$$

نضرب قيمة m_2 في الصف الاول ويجمع الناتج مع الصف الثالث.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\vdots b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{22} \vdots b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{22} \vdots b'_3 \end{bmatrix}$$

$$m'_2 = -\frac{a'_{32}}{a'_{22}}$$

نصفر قيمة a'_{32} من السطر الثالث وذلك بضرب m'_2 في السطر الثاني ويجمع مع الصف الثالث

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} : b'_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{22} : b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} : b''_3 \end{bmatrix}$$

نحل المصفوفة المثلثية العليا الجديدة بطريقة التعويض التراجعي (back substitution)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \qquad 1$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \qquad 2$$

$$a''_{33}x_3 = b'_3 \qquad 3$$

From 3 we get $x_3 = \frac{b''_3}{a''_{33}}$

نعوض قيمة x_3 في المعادلة 2 ونستخرج قيمة x_2 وهي

$$x_2 = \frac{b'_2 - a'_{23}}{a'_{22}}$$

نقوم بتعويض قيمة x_2 و x_3 في معادلة رقم 1 لغرض استخراج قيمة x_1

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}}$$

يجب ان تكون قيم $a_{11} \neq 0, a''_{33} \neq 0 , a'_{22} \neq 0,$

<u>Example:</u> By Gaussian elimination method solve

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 12$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11$$

$$2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 11 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$m_1 = -\frac{1}{3} \quad , m_2 = -\frac{2}{3}$

نضرب قيمة m_1 في الصف الاول ويجمع الناتج مع الصف الثاني

نضرب قيمة m_2 في الصف الاول ويجمع الناتج مع الصف الثالث

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 12 \\ 0 & 2.333 & 2.333 & 7 \\ 0 & -1.333 & -2.333 & -6 \end{bmatrix}$$

$$m'_2 = -\frac{1.333}{2.333}$$

نصفر قيمة -1.333 من السطر الثالث وذلك بضرب m'_2 في السطر الثاني ويجمع مع الصف الثالث

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 12 \\ 0 & 2.333 & 2.333 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$-x_3 = -2 \Rightarrow x_3 = 2$$

$$\mathbf{2.333x_2 + 2.333x_3 = 7 \Rightarrow x_2 = \frac{7-4.666}{2.333} = \frac{2.334}{2.33} = 1}$$

$$\mathbf{x_1 - x_2 + 2x_3 = 12 \Rightarrow x_1 = \frac{12+1-4}{3} = 3}$$

Guss-Jordan Method.

<u>Example:</u> By Gauss Jordan method solve

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 12$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11$$

$$2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2$$

1. Iterative Method.

1.1 Jacobi method.

تعد من اول الطرق التكرارية التي استخدمت لإيجاد الحل العددي وهي طريقة سهلة الاستخدام ولكن يعاب عليها بانها طريقة بطيئة في التوصل الى الحل الصحيح ويمكن توضيحها كما يلي:

The system given by

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Has a unique solution

Such that $\boldsymbol{a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, \dots . a_{nn} \neq 0}$

يمكن اعادة صياغة المعادلات الخطية أعلاه بشكل يسمح لنا ايجاد قيمة $\boldsymbol{x_1}$ من المعادلة الاولى وقيمة $\boldsymbol{x_2}$ من المعادلة الثانية وهكذا الى قيمة $\boldsymbol{x_n}$ من المعادلة n كالاتي

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots a_{1n}x_n)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{31}x_3 - \cdots a_{2n}x_n)$$

$$\vdots$$

$$x_n = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_3 - \cdots a_{nn-1}x_{n-1})$$

Then make an initial guess of the solution $\boldsymbol{x^0} =$ $\boldsymbol{({x_1}^{(0)}, {x_2}^{(0)}, {x_1}^{(0)}, {x_n}^{(0)})}$. Substitute these values into the right

hand side of the rewritten equations to obtain the first approximation, $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_1^{(1)}, x_n^{(1)})$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)} - \cdots a_{1n}x_n^{(0)}\right)$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - a_{23}x_3^{(0)} - \cdots a_{2n}x_n^{(0)}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{32}x_2^{(0)} - a_{33}x_3^{(0)} - \cdots a_{3n}x_n^{(0)}\right)$$

كذلك الحال بالنسبة الى قيم $x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots x_n^{(1)}$

فتصبح لدينا قيم جديدة وقريبة الى الحل الصحيح بالمقارنة مع القيم التقديرية الاولية .

نكرر نفس العملية السابقة باعتبار قيم $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \dots x_n^{(1)}$ قيم اولية والقيم الجديدة كما يلي

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}x_2^{(1)} - a_{13}x_3^{(1)} - \cdots a_{1n}x_n^{(1)}\right)$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{12}x_1^{(1)} - a_{13}x_3^{(1)} - \cdots a_{1n}x_n^{(1)}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(2)} = \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{12}x_2^{(1)} - a_{13}x_3^{(1)} - \cdots a_{1n}x_n^{(1)}\right)$$

نستمر بأعادة هذه العملية الى k من المرات ثم نتوصل الى الحل المطلوب بتحقيق شرط التقارب او التوقف

$$\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right| < \in$$

The general formula of Jacobi method is

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \quad i = 1, 2, 3, \dots and \ \ k = 0, 1, \dots .$$

حيث تمثل k عدد التكرارات للتوصل الى الحل الصحيح

Condition of convergence

$$max \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1$$

Example: By Jacobi's method find the solution of the following systems.

Use three loops.

$$4x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$$

$$x_1 - 7x_2 + 10x_3 = 2$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 8$$

where $(\boldsymbol{x_1}^{(0)} = \mathbf{1}, \boldsymbol{x_2}^{(0)} = \mathbf{3}, \boldsymbol{x_3}^{(0)} = \mathbf{2})$

Solution: $\left|\frac{a_{12}}{a_{11}}\right| + \left|\frac{a_{13}}{a_{11}}\right| = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{-2}{4}\right| = \frac{3}{4} = \mathbf{0.75}$

$$\left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right| + \left|\frac{a_{23}}{a_{22}}\right| = \left|\frac{1}{-7}\right| + \left|\frac{10}{-7}\right| = \frac{11}{7} = \mathbf{1.572}$$

$$\left|\frac{a_{31}}{a_{33}}\right| + \left|\frac{a_{32}}{a_{33}}\right| = \left|\frac{1}{-1}\right| + \left|\frac{3}{-1}\right| = \mathbf{4}$$

Max=4>1

$$\therefore \textit{is unconvergent}$$

$$4x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 8$$

$$x_1 - 7x_2 + 10x_3 = 2$$

$$\left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right| + \left|\frac{a_{23}}{a_{22}}\right| = \left|\frac{1}{3}\right| + \left|\frac{-1}{3}\right| = \frac{1}{6} = \mathbf{0.167}$$

$$\left|\frac{a_{31}}{a_{33}}\right| + \left|\frac{a_{32}}{a_{33}}\right| = \left|\frac{1}{10}\right| + \left|\frac{-7}{10}\right| = \frac{8}{10} = \mathbf{0.8}$$

Max=0.8<1 is convergence

$$4x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 8$$

$$x_1 - 7x_2 + 10x_3 = 2$$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(1 - x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)}\right)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}\left(8 - x_1^{(k)} + x_3^{(k)}\right)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(2 - x_1^{(k)} + 7x_2^{(k)}\right)$$

$k = 0$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}\left(1 - x_2^{(0)} + 2x_3^{(0)}\right) = \frac{1}{4}(1 - 3 + 4) = 0.5$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{3}\left(8 - x_1^{(0)} + x_3^{(0)}\right) = \frac{1}{3}(8 - 1 + 2) = 3$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{10}\left(2 - x_1^{(0)} + 7x_2^{(0)}\right) = \frac{1}{10}(2 - 1 + 21) = 2.2$$

$k = 1$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{4}\left(1 - x_2^{(1)} + 2x_3^{(1)}\right) = \frac{1}{4}(1 - 3 + 4.4) = 0.6$$

$$x_2^{(2)} = \frac{1}{3}\left(8 - x_1^{(1)} + x_3^{(1)}\right) = \frac{1}{3}(8 - 0.5 + 2.2) = 3.233$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{10}\left(2 - x_1^{(1)} + 7x_2^{(1)}\right) = \frac{1}{10}(2 - 0.5 + 21) = 2.25$$

$k = 2$

$$x_1^{(3)} = 0.567$$

$$x_2^{(3)} = 3.217$$

$$x_3^{(3)} = 2.403$$

2.2 Gauss-Seidel Method.

A possible improvement to the Jacobi Algorithm can be seen by re-considering Jacobi's method.

لاحظنا في طريقة Jacobi لحساب قيم المتغيرات $\boldsymbol{x_i}^{(\boldsymbol{k+1})}$ نستعمل عناصر قيم المتغيرات $\boldsymbol{x_i}^{(\boldsymbol{k})}$ فقط اما طريقة Gauss-Seidel فهي تعتبر تحسين لطريقة جاكوبي حيث تستخدم التقريبات المحسوبة بمجرد حسابها دون الانتظار الى دورة ثانية.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Has a unique solution, Such that $\boldsymbol{a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, \ldots . a_{nn} \neq 0}$

The Gauss-Seidel Iterative Technique

$$\boldsymbol{x_1}^{(\boldsymbol{k+1})} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a_{11}}}\left(\boldsymbol{b_1} - \boldsymbol{a_{12}x_2}^{(\boldsymbol{k})} - \boldsymbol{a_{13}x_3}^{(\boldsymbol{k})} - \cdots \boldsymbol{a_{1n}x_n}^{(\boldsymbol{k})}\right)$$

$$\boldsymbol{x_2}^{(\boldsymbol{k+1})} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a_{22}}}\left(\boldsymbol{b_2} - \boldsymbol{a_{21}x_1}^{(\boldsymbol{k+1})} - \boldsymbol{a_{23}x_3}^{(\boldsymbol{k})} - \cdots \boldsymbol{a_{2n}x_n}^{(\boldsymbol{k})}\right)$$

$$\boldsymbol{x_3}^{(\boldsymbol{k+1})} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a_{33}}}\left(\boldsymbol{b_3} - \boldsymbol{a_{31}x_1}^{(\boldsymbol{k+1})} - \boldsymbol{a_{32}x_2}^{(\boldsymbol{k+1})} - \cdots \boldsymbol{a_{3n}x_n}^{(\boldsymbol{k})}\right)$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{x_n}^{(\boldsymbol{k+1})} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a_{nn}}}\left(\boldsymbol{b_n} - \boldsymbol{a_{n1}x_2}^{(\boldsymbol{k+1})} - \boldsymbol{a_{n2}x_3}^{(\boldsymbol{k+1})} - \cdots \boldsymbol{a_{nn-1}x_{n-1}}^{(\boldsymbol{k+1})}\right)$$

The general formula of Gauss seidel method.

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{\substack{j=i+1 \\ i\neq j}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \quad i = 1, 2, 3, \dots \textit{and} \;\; k = 0, 1, \dots.$$

شرط التوقف والوصول للحل الصحيح وكذلك شرط اقتراب النظام هو مشابه لما هو في طريقة Jacobi

Example: By Gauss-Seidel method find the solution of the following systems.

$4x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$, where $(x_1^{(0)} = 1, x_2^{(0)} = 3, x_3^{(0)} = 2)$

$x_1 + 3x_2 - x_3 = 8$ use three loops.

$x_1 - 7x_2 + 10x_3 = 2$

Solution:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}\left(1 - x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)}\right)$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}\left(8 - x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}\right)$$
$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}\left(2 - x_1^{(k+1)} + 7x_2^{(k+1)}\right)$$

$k = 0$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}\left(1 - x_2^{(0)} + 2x_3^{(0)}\right) = \frac{1}{4}(1 - 3 + 4) = 0.5$$
$$x_2^{(1)} = \frac{1}{3}\left(8 - x_1^{(1)} + x_3^{(0)}\right) = \frac{1}{3}(8 - 0.5 + 2) = 3.167$$
$$x_3^{(1)} = \frac{1}{10}\left(2 - x_1^{(1)} + 7x_2^{(1)}\right) = \frac{1}{10}(2 - 0.5 + 22.167) = 2.367$$

$k = 1$

$$x_1^{(2)} = \frac{1}{4}\left(1 - x_2^{(1)} + 2x_3^{(1)}\right) = \frac{1}{4}(1 - 3.167 + 4.733) = 0.642$$
$$x_2^{(2)} = \frac{1}{3}\left(8 - x_1^{(2)} + x_3^{(1)}\right) = \frac{1}{3}(8 - 0.642 + 2.367) = 3.242$$
$$x_3^{(2)} = \frac{1}{10}\left(2 - x_1^{(2)} + 7x_2^{(2)}\right) = \frac{1}{10}(2 - 0.642 + 22.692) = 2.405$$

$k = 2$

$$\boldsymbol{x_1}^{(3)} = \frac{1}{4}(1 - 3.242 + 4.81) = 0.642$$

$$\boldsymbol{x_2}^{(3)} = \frac{1}{3}(8 - 0.642 + 2.405) = 3.254$$

$$\boldsymbol{x_3}^{(3)} = \frac{1}{10}(2 - 0.642 + 22.780) = 2.414$$

Interpolation theory

كثيراً من المسائل التي تواجهنا هي ايجاد قيم غير معلومة على ضوء قيم او بيانات معلومة لمجموعة من الملاحظات. فعلى سبيل المثال اذا كانت المعلومات المتوفرة لنا لعدد سكان العراق هي فقط السنوات 1934, 1947, 1977, 1997, فاذا اردنا تقدير عدد سكان العراق في العام 1940 او 1955 على ضوء البيانات المتوفرة تسمى هذه الطريقة بالاندراج او الاستكمال (Interpolation) اما اذا اردنا تخمين سكان العراق في سنة 2020 او 1920 على ضوء البيانات المعطاة فتسمى بالاستفهام extrapolation

<u>Lagrange Interpolating Polynomials: صيغة لاكرانج لايجاد متعددة الحدود</u>

عندما تكون قيم x غير متساوية المسافة اي ان Δx غير متساوية ولأية قيمتين قيم x المتسلسلة فيمكن استخدام صيغة لاكرانج لإيجاد قيمة الدالة $f(x)$ وهي اسهل الطرق العددية المستخدمة ويمكن توضيح نموذج لاكرانج من خلال البيانات التالية:

x	x_0	x_1	x_2
$f(x)$	$\mathrm{f}(x_0)$	$\mathrm{f}(x_1)$	$\mathrm{f}(x_2)$

لتكن f دالة حقيقية ومستمرة على الفترة [a,b] وقيمتها معلومة عند النقاط x_0, x_1, x_2 لتقدير قيمة f في نقطة واحد x^* فأن صيغة لاكرانج تكتب بالصيغة

$$L_i(x^*) = \frac{(x^* - x_1)(x^* - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, \frac{(x^* - x_0)(x^* - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \frac{(x^* - x_0)(x^* - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \quad i = 0,1,2$$

لذا فأن صيغة لاكرانج العامة هي

$$f(x^*) = f(x_0)L_0(x^*) + f(x_1)L_1(x^*) + f(x_2)L_2(x^*)$$

$$f(x^*) = f(x_0)\frac{(x^* - x_1)(x^* - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1)\frac{(x^* - x_0)(x^* - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f(x_2)\frac{(x^* - x_0)(x^* - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

Example: By using Lagrange formula find the value of the function

x	0	1	2	4
$f(x)$	1	1	2	5

Find $f(3)$ and $f(5)$

$$f(3) = f(x_0)\frac{(x^* - x_1)(x^* - x_2)(x^* - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$+ f(x_1)\frac{(x^* - x_0)(x^* - x_2)(x^* - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$+ f(x_2)\frac{(x^* - x_0)(x^* - x_1)(x^* - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$+ f(x_3)\frac{(x^* - x_0)(x^* - x_1)(x^* - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$f(3) = f(0)\frac{(3-1)(3-2)(3-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)}$$

$$+ f(1)\frac{(3-0)(3-2)(3-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)}$$

$$+ f(2)\frac{(3-0)(3-1)(3-4)}{(2-4)(2-1)(2-4)}$$

$$+ f(4)\frac{(3-0)(3-1)(3-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)}$$

$$\boldsymbol{f(3) = 0.25 - 1 + 3 + 1.25 = 3.5}$$

$$f(5) = f(x_0)\frac{(x^* - x_1)(x^* - x_2)(x^* - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}$$

$$+ f(x_1)\frac{(x^* - x_0)(x^* - x_2)(x^* - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

$$+ f(x_2)\frac{(x^* - x_0)(x^* - x_1)(x^* - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

$$+ f(x_4)\frac{(x^* - x_0)(x^* - x_1)(x^* - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

$$f(5)=f(0)\frac{(5-1)(5-2)(5-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)}$$

$$+f(1)\frac{(5-0)(5-2)(5-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)}$$

$$+f(2)\frac{(5-0)(5-1)(5-4)}{(2-4)(2-1)(2-4)}$$

$$+f(4)\frac{(5-0)(5-1)(5-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)}$$

$$\boldsymbol{f(5)=-1.5+5-10+12.25=6.5}$$

Inverse Interpolation الاندراج العكسي

عبارة عن عملية حساب قيمة x بدلالة القيم الجدولية للدالة y= f(x) , والصيغة العامة لها هي

$$g(y)=x^*=\sum_{j=0}^{n}x_j\prod_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n}\frac{y^*-y_i}{y_j-y_i}$$

If n=2

$$x^*=x_0\frac{(y^*-y_1)(y^*-y_2)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)}+x_1\frac{(y^*-y_0)(y^*-y_2)}{(y_1-y_0)(y_1-y_2)}+x_2\frac{(y^*-y_0)(y^*-y_1)}{(y_2-y_0)(y_2-y_1)}$$

Example: Find the value of x^* when $y^*=0.2703$, use the following table to find it.

y	0.625	0.3448	0.2083
x	1.6	2.9	4.8

Solution:

$$x^* = x_0 \frac{(y^* - y_1)(y^* - y_2)}{(y_0 - y_1)(y_0 - y_2)} + x_1 \frac{(y^* - y_0)(y^* - y_2)}{(y_1 - y_0)(y_1 - y_2)} + x_2 \frac{(y^* - y_0)(y^* - y_1)}{(y_2 - y_0)(y_2 - y_1)}$$

$$x^* = 1.6 \frac{(0.2703 - 0.3448)(0.2703 - 0.2083)}{(0.625 - 0.3448)(0.625 - 0.2083)}$$
$$+ 2.9 \frac{(0.2703 - 0.625)(0.2703 - 0.2083)}{(0.3448 - 0.625)(0.3448 - 0.2083)}$$
$$+ 4.8 \frac{(0.2703 - 0.625)(0.2703 - 0.3448)}{(0.2083 - 0.625)(0.2083 - 0.3448)}$$

$$= 1.6 \frac{-0.0046}{0.1169} + 2.9 \frac{-0.022}{-0.0382} + 4.8 \frac{0.0264}{0.0569}$$

$$= -0.06933 + 1.6702 + 2.2271 = 3.8658$$

Finite Differences

1- Forward Differences : الفروقات الامامية (التقدمية)

لتكن الدالة المستخدمة هي y=f(x) وهي دالة حقيقية قيمتها معلومة في $n+1$ من النقاط وهي معروفة في نقاط متساوية الابعاد وعلى النحو الاتي

$$\begin{aligned}
&x_0 &&;\ y_0 = \mathrm{f}(x_0) = f_0\\
&x_1 = x_0 + \mathrm{h} &&;\ y_1 = \mathrm{f}(x_1) = f_1\\
&x_2 = x_1 + \mathrm{h} &&;\ y_2 = \mathrm{f}(x_2) = f_2\\
&\ \ \vdots\\
&x_n = x_{n-1} + \mathrm{h} &&;\ y_n = \mathrm{f}(x_n) = f_n
\end{aligned}$$

ويرمز لعامل (مؤثر) الفروق الامامية بالرمز Δ (Operator) ويعرف بالمعادلة

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

يعرف الفرق الامامي الاول

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0$$

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1$$

$\Delta y_2 = y_3 - y_2$

General form is

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{i} = 0,1,2,\ldots,\mathrm{n}-1$$

ونحصل على الفروق الامامية الثانية من خلال اخذ الفروق للفروق الاولى

$$\Delta^2 y_0 = \Delta(\Delta y_0) = \Delta(y_1 - y_0) = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - y_1 - y_1 + y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0$$

$$\Delta^2 y_1 = \Delta(\Delta y_1) = \Delta(y_2 - y_1) = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - y_2 - y_2 + y_1 = y_3 - 2y_2 + y_1$$

General form is

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathrm{i} = 0,1,2,\ldots,\mathrm{n}-2$$

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i$$

$$\Delta^4 y_i = \Delta^3 y_{i+1} - \Delta^3 y_i$$

وبصورة عامة تعرف الفروقات الامامية من الرتبة k وكلاتي

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i \ldots\ldots\ldots. i = 0,1,2,\ldots.n-k$$

يمكن الحصول على كل هذه الفروقات من جدول بسيط يكون كما ادناه

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_2$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_4$		
		Δy_3			
x_4	y_4				

Example: write differences table of the function $f(x) = x^3$ (x=0,1,2,3,4)

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
0	0				
		1			
1	1		6		

		7		6	
2	8		12		0
		19		6	
3	27		18		
		37			
4	64				

2. Backward Differences: الفروقات الخلفية (التراجعية)

يرمز لمؤثر الفروق التراجعية بالرمز ∇ ويعرف الفرق التراجعي للدالة f(x) بالاتي

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h)$$

فيمكن تعريف الفروقات الترجعية بالتي

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$$

$$\nabla^2 y_i = \nabla(\nabla y_i) = \nabla(y_i - y_{i-1})$$

$$= y_i - y_{i-1} - (y_{i-1} - y_{i-2}) = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}$$

$$\nabla^3 y_i = y_i - 3y_{i-1} + 3y_{i-2} - y_{i-3}$$

Or

$$\nabla^3 y_i = \nabla^2(\nabla y_i) = \nabla^2(y_i - y_{i-1}) = \nabla^2 y_i - \nabla^2 y_{i-1} \qquad i = n, \dots, 3$$

$$\nabla^4 y_i = \nabla^3(\nabla y_i) = \nabla^2(y_i - y_{i-1}) = \nabla^3 y_i - \nabla^3 y_{i-1} \qquad i = n, \dots, 4$$

وبصورة عامة تعرف الفروقات التراجعية من الرتبة k بالاتي

$$\nabla^k y_i = \nabla^{k-1}(\nabla y_i) = \nabla^{k-1} y_i - \nabla^{k-1} y_{i-1}$$

ويمكن الحصول على كل الفروقات التراجعية من جدول بسيط يكون في ادناه وقد اخذت قيم i لتلائم صيغ القوانين

x_i	y_i	∇y_i	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$	$\nabla^4 y_i$
x_0	y_0				
		∇y_1			
x_1	y_1		$\nabla^2 y_2$		
		∇y_2		$\nabla^3 y_3$	
x_2	y_2		$\nabla^2 y_3$		$\nabla^4 y_4$
		∇y_3		$\nabla^3 y_4$	
x_3	y_3		$\nabla^2 y_4$		
		∇y_4			
x_4	y_4				

3. Central Differences: الفروقات المركزية

يرمز لمؤثر الفروقات المركزية بالرمز δ وتعرف الفروق المركزية بالاتي

$\delta y_{i+\frac{1}{2}} = y_{i+1} - y_i$ where $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$

If $i = 0 \Longrightarrow \delta y_{\frac{1}{2}} = y_1 - y_0$

If $i = 1 \Longrightarrow \delta y_{\frac{3}{2}} = y_2 - y_1$

If $i = 2 \Longrightarrow \delta y_{\frac{5}{2}} = y_3 - y_2$

الفروق الثانية

$$\delta^2 = \delta(\delta y_i) = \delta\left(y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}\right) = \left(y_{i+1} - y_i - (y_i - y_{i-1})\right) = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}$$

Numerical Integration

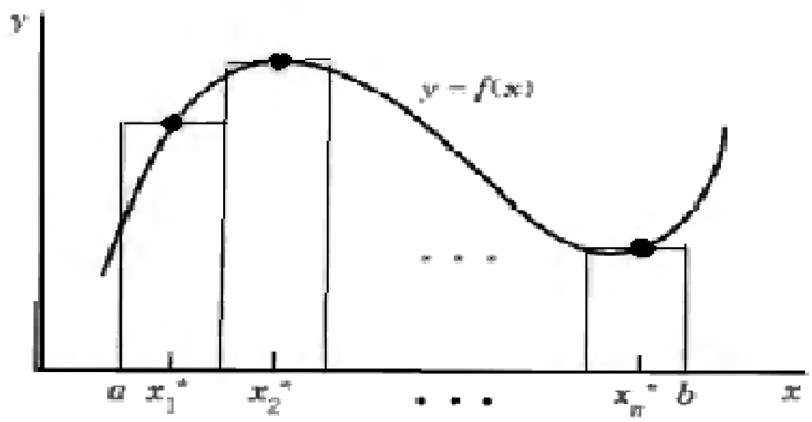
$$I = \int_a^b f(x)dx$$

حيث ان a, b قيمتان محددتان وان $f(x)$ هي دالة مستمرة للمتغير x الذي يأخذ قيمة $a \le x \le b$

Method of integration

a. Rectangular Rule

It is obtained if we subdivide the interval of integration $a \le x \le b$ into n subintervals of equal length $h = \frac{b-a}{n}$ and in each subinterval approximate *f* by the constant $f(x_j^*)$, the value of *f* at the midpoint x_j^* of the j^{th} subinterval, where j =0, 1, 2, ..., n and $x_j^* = \frac{x_{j+1}+x_j}{2}$. (See the figure).



The rectangular rule is:

$$\boxed{r = \int_a^b f(x)dx = h\left[f\left(x_0^*\right)+f\left(x_j^*\right)+.....+f\left(x_n^*\right)\right]}$$

and. $h = \frac{(b-a)}{n}$

<u>Example:</u>

Using the rectangular rule with n = 5 for the following equation $y = \int_1^2 \frac{1}{x}dx$ compare with the exact value.

Solution:

The exact value of this integral is:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln(x)\Big|_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = 0.693147 .$$

By the rectangular rule:

$x_o = a = 1$

$x_n = b = 2$

$n = 5$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{5} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

j	**x_j**	**x_j^***	**$f(x_j^*)$**
0	1.0	1.1	0.909090
1	1.2	1.3	0.769231
2	1.4	1.5	0.666667
3	1.6	1.7	0.588235
4	1.8	1.9	0.526316
5	2.0		

$$r = h[y_o{}^* + y_1{}^* + y_2{}^* + y_3{}^* + y_4{}^*]$$

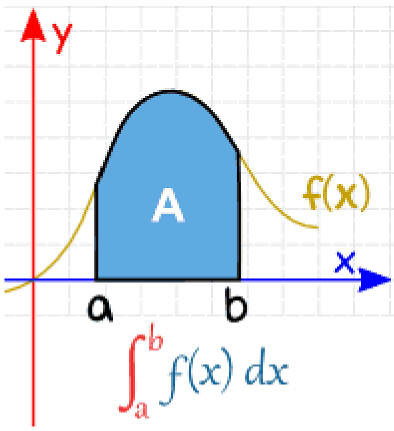
$$r = 0.2 * [0.909090 + 0.769231 + 0.666667 + 0.588235 + 0.526316]$$

$r = 0.691908$ **and the error =** $|0.691908 - 0.693147|$ **= 0.001239**

Numerical Integration: التكامل العددي

$$A = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

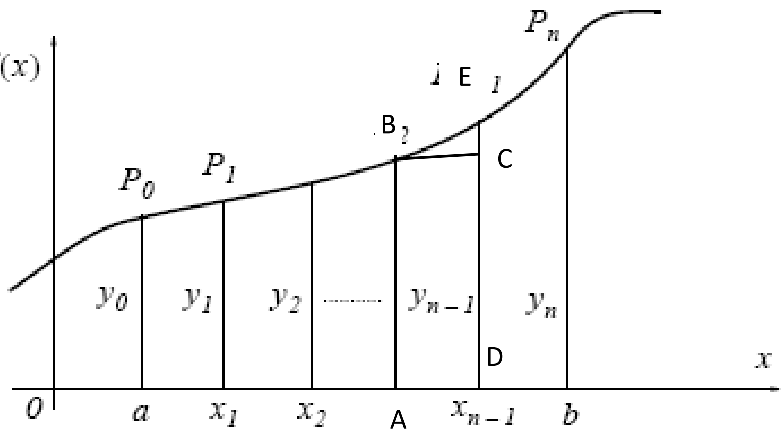
حيث ان a, b قيمتان محددتان وان $f(x)$ هي دالة مستمرة للمتغير x الذي يأخذ قيمة $a \leq x \leq b$



Method of integration

2. **Trapezoidal Rule: قاعدة شبه المنحرف**

Consider the function y = f(x) for the interval a ≤ x ≤ b, shown in figure:



لحساب قيمة التكامل بطريقة شبه المنحرف (اي حساب المساحة المحصورة بين منحني الدالة y=f(x) ومحور السينات x-axis المستقيمان x=aو x=b) فأننا نقسم الفترة [a,b] الى n من الفترات المتساوية الطول $h = \frac{b-a}{n}$ فتكون حدود الفترات

$$x_0 = a, x_1, x_2, .., x_n = b$$

لنأخذ على سبيل المثال الفترة $[x_i, x_{i+1}]$

مساحة المستطيل $\text{ABCD} = hy_i$

مساحة المثلث $\text{BCE} = \frac{h}{2}(y_{i+1} - y_i)$

المساحة الكلية $A_i = hy_i + \frac{h}{2}(y_{i+1} - y_i)$

$$= hy_i + \frac{h}{2}y_{i+1} - \frac{h}{2}y_i = \frac{h}{2}y_{i+1} + \frac{h}{2}y_i$$

$$= \frac{h}{2}(y_{i+1} + y_i)$$

المساحة المحصورة في الفترة $[x_0, x_1]$ $\quad A_0 = \frac{h}{2}(y_1 + y_0)$

المساحة المحصورة في الفترة $[x_1, x_2]$ $\quad A_1 = \frac{h}{2}(y_2 + y_1)$

$\vdots$

المساحة المحصورة في الفترة $[x_{n-1}, x_n]$ $\quad A_{n-1} = \frac{h}{2}(y_n + y_{n-1})$

المساحة الكلية المحصورة تحت المنحني

$$T_I = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_{n-1}$$

$$= \frac{h}{2}(y_1 + y_0) + \frac{h}{2}(y_2 + y_1) + \cdots + \frac{h}{2}(y_n + y_{n-1})$$

$$= \frac{h}{2}y_1 + \frac{h}{2}y_0 + \frac{h}{2}y_2 + \frac{h}{2}y_1 + \cdots + \frac{h}{2}y_n + \frac{h}{2}y_{n-1}$$

$$= \frac{h}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{h}{2}y_n$$

$$T_I = \frac{h}{2}(y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}))$$

Example: By **Trapezoidal Rule** find approximate value of the following integration

$\int_0^1 \cos(x)\, dx \quad where\ n = 10$

Solution: exact $\int_0^1 \cos(x)\, dx = \sin(x)]_0^1 = 0.8414709848$

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = 0.1$

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y_i	1	0.995	0.980	0.955	0.921	0.878	0.825	0.765	0.697	0.622	0.540

$$T_I = \frac{h}{2}(y_0 + y_{10} + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_9))$$

$$= \frac{.1}{2}(1 + 0.540 + 2(0.980 + 0.955 + 0.921 + 0.878 + 0.825 + 0.765 + 0.697 + 0.622 + 0.995))$$

$$= 0.05(1.540 + 2(7.638)) = 0.05(1.540 + 15.276) = 0.840$$

Example: By **Trapezoidal Rule** find approximate value of the following integration

$\int_0^4 x\, lnx\, dx \quad where\ n = 8$

Solution: exact $\int_0^4 x\, lnx\, dx = \frac{1}{2}x^2 lnx\Big]_0^4 - \frac{1}{2}\int_0^4 x\, dx =$

$\frac{1}{2}x^2 lnx\Big]_0^4 - \frac{1}{4}x^2\Big]_0^4 = 11.090 - 4 =$

$$= 7.090$$

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{8} = 0.5$

x_i	0	0.5	1	1. 5	2	2.5	3	3.5	4
y_i	0	-0.347	0	0.608	1.386	2.296	3.296	4.385	5.545

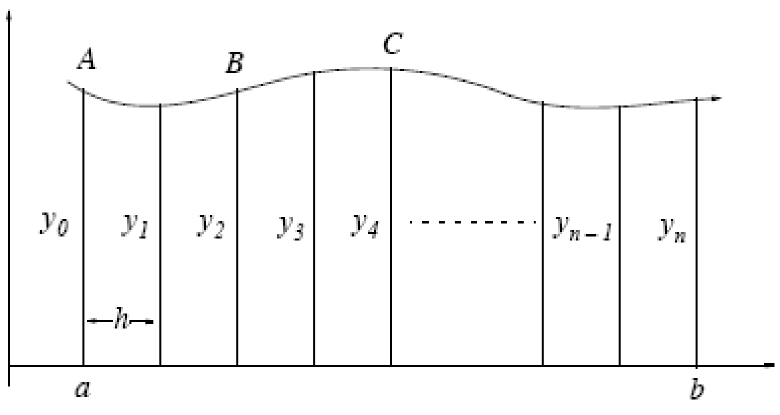
$$T_I = \frac{h}{2}(y_0 + y_8 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7))$$

=7.196

c. <u>Simpson's Rule</u>

It is one of the important **Quadrature Rules** techniques. Simpson's rule is generally accurate for most problems.

Just as with the trapezoidal rule, Simpson's rule can be improved by dividing the integration interval a ≤ x ≤ b into an <u>*even number*</u> of equal width, say, into n = 2m subintervals of length h = (b – a)/(2 m), with endpoints x_o (= a), x_1, …., x_{2m-1}, x_{2m}(= b); see the figure.



When the area under each segment are added, we get

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f_o + 4f_{2m-1} + 2f_{2m-2} + f_{2m})}$$

where $\left(h = \frac{b-a}{2m}\right)$, $(2\text{m} = \text{n} = \text{even})$ and $(x_{n+1} = x_n + h)$

In simple way, we can shows algorithm for Simpson's rule:

Input: $a, b, m, f_o, \ldots.., f_{2m}$ Compute: $\left(h = \frac{b-a}{2m}\right)$ $S_o = f_o + f_{2m}$ $S_1 = f_1 + f_3 + \ldots.. + f_{2m-1}$ $S_2 = f_2 + f_4 + \ldots.. + f_{2m-2}$ $J = \frac{h}{3}(S_o + 4S_1 + 2S_2)$

Output: J

<u>Example:</u> Evaluate $J = \int_0^{\pi} \sin(x)dx$ by Simpson's rule with n = 4 and estimate the error.

<u>Solution:</u>

The exact value of this integral is

$$J = \int_0^{\pi} \sin(x)dx = -\cos(x)\Big|_0^{\pi} = -\left(\cos(\pi) - \cos(0)\right) = -(-1-1) = 2$$

By using Simpson's rule:

$x_o = a = 0$

$x_{2m} = b = \pi$

n = 2m = 4

$$h = \frac{b-a}{2m} = \frac{\pi - 0}{4} = 0.7854$$

$f(x) = \sin(x)$

n	x_n	$f(x_n)$
0	0	0
1	0.7854	0.7071
2	1.5708	1.0000
3	2.3562	0.7071
4	π	0

$$J = \frac{h}{3}\left(0+0+4*(0.7071+0.7071)+2*(1.0000)\right) = 2.0045$$

D. Romberg Method.

يمكن اعتماد خوارزمية لأيجاد قيمة التكامل بطريقة رمبرك على الجدول التالي

$T_1^{(0)}$					
$T_2^{(0)}$	$T_2^{(1)}$				
$T_4^{(0)}$	$T_4^{(1)}$	$T_4^{(2)}$			
$T_8^{(0)}$	$T_8^{(1)}$	$T_8^{(2)}$	$T_8^{(3)}$		
$T_{16}^{(0)}$	$T_{16}^{(1)}$	$T_{16}^{(2)}$	$T_{16}^{(3)}$	$T_{16}^{(4)}$	
$T_{32}^{(0)}$	$T_{32}^{(1)}$	$T_{32}^{(2)}$	$T_{32}^{(3)}$	$T_{32}^{(4)}$	$T_{32}^{(5)}$

$\vdots$

حيث يمثل العمود الاول قيم التكامل بطريقة شبه المنحرف (.Trapz) ومن الملاحظ أن تقسيم الفترات يتم بطريقة مضاعفة.

أما الأعمدة الباقية فيمكن استخراج قيمها من الصيغة الرياضية الاتية

$$T_{2i}^{(j)} = \frac{4^j T_{2i}^{(j-1)} - T_i^{(j-1)}}{4^j - 1} \qquad i = 1, 2, 4, 8, 16, ..$$

$$j = 1, 2, 3, ...$$

حيث ان العمود الثاني يمثل j=1 والعمود الثالث j=2 وهكذا

$i = 1, j = 1$

$$T_2^{(1)} = \frac{4T_2^{(0)} - T_1^{(0)}}{4 - 1}$$

$i = 2, j = 1$

$$T_4^{(1)} = \frac{4T_4^{(0)} - T_2^{(0)}}{4 - 1}$$

$i = 4, j = 1$

$$T_8^{(1)} = \frac{4T_8^{(0)} - T_4^{(0)}}{4 - 1}$$

Example: By Roberg method find the value of

$\int_0^4 x\, lnx\, dx$ where i=1,2,4

Solution:

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{4 - 0}{1} = 4$$

x_i	0	4
y_i	0	5.545

$$T_1^{(0)} = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) = 11.090$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{2} = 2$$

x_i	0	2	4
y_i	0	1.386	5.545

$$T_2^{(0)} = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + y_2) = 8.317$$

$$i = 1, j = 1$$

$$\boldsymbol{T_2^{(1)}} = \frac{\boldsymbol{4T_2^{(0)} - T_1^{(0)}}}{\boldsymbol{4-1}} = \frac{4(8.317) - 11.090}{3} = 7.393$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{4} = 1$$

x_i	0	1	2	3	4
y_i	0	0	1.386	3.296	5.545

$$T_4^{(0)} = \frac{h}{2}(y_0 + y_4 + 2(y_1 + y_2 + y_3))$$

$$= \frac{1}{2}\big(0 + 5.545 + 2(0 + 1.386 + 3.296)\big) = 7.455$$

$$i = 2, j = 1$$

$$\boldsymbol{T_{2i}^{(j)}} = \frac{\boldsymbol{4^j T_{2i}^{(j-1)} - T_i^{(j-1)}}}{\boldsymbol{4^j - 1}}$$

$$\boldsymbol{T_4^{(1)}} = \frac{\boldsymbol{4T_4^{(0)} - T_2^{(0)}}}{\boldsymbol{4-1}} = \frac{4(7.455) - 8.317}{3} = 7.168$$

$$i = 2, j = 2$$

$$\boldsymbol{T_4^{(2)}} = \frac{\boldsymbol{4^2 T_4^{(1)} - T_2^{(1)}}}{\boldsymbol{4^2 - 1}} = \frac{16(7.168) - 7.393}{15} = 7.153$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{8} = 0.5$$

x_i	0	0.5	1	1. 5	2	2.5	3	3.5	4

y_i	0	-0.347	0	0.608	1.386	2.296	3.296	4.385	5.545

$$T_8^{(0)} = \frac{h}{2}(y_0 + y_8 + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7))$$

=7.196

$$i = 4, j = 1$$

$$\boldsymbol{T_{2i}^{(j)} = \frac{4^j T_{2i}^{(j-1)} - T_i^{(j-1)}}{4^j - 1}}$$

$$\boldsymbol{T_8^{(1)}} = \boldsymbol{\frac{4T_8^{(0)} - T_4^{(0)}}{4 - 1}} = \frac{4(7.196) - 7.455}{3} = 7.110$$

$$i = 4, j = 2$$

$$\boldsymbol{T_8^{(2)}} = \boldsymbol{\frac{4^2 T_8^{(1)} - T_4^{(1)}}{4^2 - 1}} = \frac{16(7.110) - 7.168}{15} = 7.106$$

$$i = 4, j = 3$$

$$\boldsymbol{T_8^{(3)}} = \boldsymbol{\frac{4^3 T_8^{(2)} - T_4^{(2)}}{4^3 - 1}} = \frac{64(7.106) - 7.153}{63} = 7.105$$

First order differential equations:

a. Euler Method

The object of the method is so obtain an approximation to the well-posed initial problem $y'=f(x,y)$, $y(x_0)=y_0$, $a \le x \le b$. The common distance between the points $h=\frac{(b-a)}{N}$ is called the step size. From Taylor series $\left(y(x+h)=y(x)+h\,y'(x)+\frac{h^2}{2}y''(x)+\ldots.\right)$, for a small values of h the higher orders h^2, h^3, ….are very small

$$\begin{aligned} y(x+h) &= y(x)+h\,y'(x) \\ &= y(x)+hf(x,y) \end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \qquad\qquad n = 0,1,\ldots$$

So the first step we compute

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Also the second step we compute

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

And in general

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.}$$

This is called Euler method or Euler – Cauchy method. The truncation of error is of order h^2.

Example: By Euler's method solve $y' = 1 - 2xy$ where $h = 0.1$ and $y(1) = 0.538$, find y_3

Solution: $y' = 1 - 2xy$, $h = 0.1$ $x_0 = 1,$ $y_0 = 0.538$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \qquad n = 0,1, \ldots$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$f(x_0, y_0) = y_0' = 1 - 2x_0y_0 = 1 - 2(1)(0.538) = -0.076$$

$$y_1 = 0.538 + 0.1(-0.076) = 0.530$$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$$

$$x_1 = x_0 + h = 1 + 0.1 = 1.1$$

$$f(x_1, y_1) = y_1' = 1 - 2x_1y_1 = 1 - 2(1.1)(0.530) = -0.166$$

$$y_2 = 0.530 + 0.1(-0.166) = 0.513$$

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2)$$

$$x_2 = x_1 + h = 1.1 + 0.1 = 1.2$$

$$f(x_2, y_2) = y_2' = 1 - 2x_2y_2 = 1 - 2(1.2)(0.513) = -0.231$$

$$y_3 = 0.513 + 0.1(-0.231) = 0.490$$

Find the approximation solution to the initial value problem using h = 0.2, and y(0) = 0. Compare it values with analytical solution $\left(y(x)=e^{x}-x-1\right)$.

Solution:

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$$

$y_{n+1}=y_n+0.2(x_n+y_n)$---------------where $f(x_n,y_n)=(x_n+y_n)$

n	x_n	y_n	Exact values	Error
0	0.0	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.2	0.0000	0.0214	0.0214
2	0.4	0.0400	0.0918	0.0518
3	0.6	0.1280	0.2221	0.0941
4	0.8	0.2736	0.4255	0.1519
5	1.0	0.4883	0.7183	0.2300

H.W:

Solve the following equation by using Euler method. Choosing h = 0.1 and y(0) = 1, from x = 0 to x = 1: $y' = 3xy$

b. Improve Euler method

We can improve the Euler method by first compute $y^*_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$………… (1) And then the new value $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f\left(x_{n+1}, y^*_{n+1}\right)\right]$………… (2).

The improve Euler method is predictor – corrector method because in each step we first predict a value by (1) and then correct it by (2).

In algorithmic form, using the notations $k_n = hf(x_n, y_n)$ in equation (1) and $\ell_n = hf\left(x_{n+1}, y^*_{n+1}\right)$ in equation (2), so we can write the improve Euler method or improve Euler – Cauchy method (sometimes also called Heun method or Trapezoidal method):

For $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ and give h and N

for n = 1, …., N – 1

$k_n = hf(x_n, y_n)$;

$\ell_n = hf(x_n + h, y_n + k_n)$;

$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_n + \ell_n)$;

end;

Then y_{n+1} is an approximation to $y(x_{n+1})$ where ($x_{n+1} = x_0 + (n + 1)h$).

Example:

Apply the improve Euler method to the initial value problem $y' = x + y$ choosing h = 0.2 and y(0) = 0, where $0 \le x \le 1$.

Solution:

$$k_n = hf(x_n, y_n)$$

$$k_n = 0.2\,(x_n, y_n)$$

$$\ell_n = h(x_n + h, y_n + k_n)$$

$$\ell_n = 0.2\,(x_n + 0.2, y_n + 0.2(x_n + y_n))$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_n + l_n)$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_0 + l_0)$$

$$k_0 = 0.2(x_0, y_0) = 0.2(x_0 + y_0) = 0.2(0 + 0) = 0$$

$$l_0 = 0.2((x_0 + 0.2), (y_0 + k_0))$$

$$= 0.2((x_0 + 0.2) + (y_0 + k_0))$$

$$= 0.2\big((0 + 0.2) + (0 + 0)\big) = 0.04$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_0 + l_0) = 0 + \frac{1}{2}(0 + 0.04) = 0.02$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(k_1 + l_1)$$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.2 = 0.2$$

$$k_1 = 0.2(x_1 + y_1) = 0.2(0.2 + 0.02) = 0.044$$

$$l_1 = 0.2((x_1 + 0.2) + (y_1 + k_1))$$

$$= 0.2(0.2 + 0.2 + 0.02 + 0.044) = 0.0928$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(k_1 + l_1) = 0.02 + \frac{1}{2}(0.044 + 0.0928) = 0.0884$$

$$\vdots$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_n + \ell_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{0.2}{2}(2.2x_n + 2.2y_n + 0.2)$$

n	x_n	y_n	Exact values	Error
0	0.0	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.2	0.0200	0.0214	0.0014

2	0.4	0.0884	0.0918	0.0034
3	0.6	0.2158	0.2221	0.0063
4	0.8	0.4153	0.4255	0.0102
5	1.0	0.7027	0.7183	0.0156

H.W:

$y' = y - y^2$, choosing h = 0.1 and y(0) = 0.2, where $0 \le x \le 1$. Solve it by improved Euler method. Compare it values with analytical solution $\left(y(x) = \dfrac{1}{1+4e^{-x}} \right)$.

c. Runge – Kutta Methods (RK methods)

The Runge−Kutta method is the most widely used method of solving differential equations with numerical methods. It is much greater accuracy than that of the improve Euler method.

The third order Runge – Kutta algorithm:

for n = 1, ….., N – 1

$$k_1 = hf\,(x_n, y_n);$$
$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right);$$
$$k_3 = hf\,(x_n + h, y_n + 2k_2 - k_1);$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3);$$

end;

The fourth order Runge – Kutta algorithm:

for n =1, ….., N – 1

$$k_1 = hf\,(x_n, y_n);$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right);$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right);$$

$$k_4 = hf\,(x_n + h, y_n + k_3);$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4);$$

end;

Then y_{n+1} is an approximation to $y(x_{n+1})$ where $x_{n+1} = x_0 + (n+1)h$.

<u>Example:</u>

Apply the 4 order Runge – Kutta method to the initial value problem $y' = x + y$. Choosing $h = 0.2$ and $y(0) = 0$, computing five steps. Analytical solution is $\left(y(x) = e^x - x - 1\right)$.

<u>Solution:</u>

$k_1 = 0.2(x_n + y_n)$ $\quad$ $k_2 = 0.2(x_n + 0.1 + y_n + 0.5k_1)$

$k_3 = 0.2(x_n + 0.1 + y_n + 0.5k_2)$ $\quad$ $k_4 = 0.2(x_n + 0.2 + y_n + k_3)$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

n	x_n	y_n	Exact values	10^{-6} Error of y_n
0	0.0	0.000000	0.000000	0
1	0.2	0.021400	0.021404	3

2	0.4	0.091818	0.091825	7
3	0.6	0.222107	0.222119	12
4	0.8	0.425521	0.425541	20
5	1.0	0.718251	0.718282	31

If we comparison of the accuracy of the three methods under consideration in the case of the initial value problem (y' = x + y), with h = 0.2. As show in table below:

n	x	Exact values	Error of Euler	Error of Improve Euler	Error of Runge–Kutta
1	0.2	0.021404	0.0214	0.0014	0.000003
2	0.4	0.091825	0.0518	0.0034	0.000007
3	0.6	0.222119	0.0941	0.0063	0.000012
4	0.8	0.425541	0.1519	0.0102	0.000020
5	1.0	0.718282	0.2300	0.0156	0.000031

H.W:

Use the 3 order Runge – Kutta method to solve the following problems.

1. y' = 1/2*(y/x – x/y), y(2) = 2, h = 0.2.
2. y' = sin(2x) – y*tan(x), y(0) = 1, h = 0.2., exact solution $\left[y = 3\cos(x) - 2\cos^2(x)\right]$.

Higher order (fifth, sixth, etc) Runge – Kutta formulas have been developed and can be used to advantage in determining a suitable size (h).